ĐỀ KIỂM TRA HOC SINH GIỎI LỚP 8

TRƯỜNG LÊ QUÝ ĐÔN - QUẬN 3 (2013-2014)

(Thi ngày: ngày 29/3/2014)

Thời gian: 120 Phút

Bài 1:

a) Chứng minh: $a^3+b^3+c^3=3abc$ với $a+b+c=0$

b) Cho $abc=1; a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Tính $\left(a^{29}-1\right)\left(b^3-1\right)\left(c^{2014}-1\right)$

Bài 2: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\frac{1}{xy}\ge\frac{4}{\left(x+y\right)^2}$

b) $\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}\ge\frac{6}{\left(x+y\right)^2}$

Bài 4:

Cho ΔABC vuông tại A có AH là đường cao. BQ là tia phân giác của góc B; AD là tia phân giác của HAC. BQ cắt AD tại K. CK cắt AB tại L.

a) Chứng minh: ΔDAQ là tam giác cân.

b) Chứng minh: $\frac{DB}{DC}\cdot\frac{LB}{LA}\cdot\frac{QA}{QC}=1$

Bài 5:

Cho ΔABC có AB = 13; AC = 14; BC = 15; có đường cao AH. Tính AH.

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a) **Chứng minh:** $a^3+b^3+c^3=3abc$ **với** $a+b+c=0$

Ta có: $a+b+c=0\Rightarrow a+b=-c$

Do đó: $a^3+b^3+c^3=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)+c^3=-c^3-3ab\left(-c\right)+c^3=3abc$ **: đpcm**

b) **Cho** $abc=1; a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. **Tính** $\left(a^{29}-1\right)\left(b^3-1\right)\left(c^{2014}-1\right)$

Ta có: $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\Leftrightarrow a+b+c=ab+bc+ca\left(\text{vì } abc=1\right)$

$\Leftrightarrow a+b+c-ab-bc-ca=0\Leftrightarrow abca+b+c-ab-bc-ca-1=0\left(\text{vì } abc=1\right)$

$\Leftrightarrow ab\left(c-1\right)-a\left(c-1\right)-b\left(c-1\right)+\left(c-1\right)=0\Leftrightarrow\left(c-1\right)\left(ab-a-b+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(a-1\right)\left(b-1\right)\left(c-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\b=1\\c=1\end{array}\right.$$

Do đó: $\left(a^{29}-1\right)\left(b^3-1\right)\left(c^{2014}-1\right)=0$

Bài 2: **Chứng minh các bất đẳng thức sau với x, y > 0:**

a) $\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{4}{\left(x+y\right)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2\ge 4xy\left(\text{vì } x, y>0 \text{ nên } x+y>0 \text{ và } xy>0\right)$

$\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\ge 0$ **: luôn đúng**

Vậy BĐT đã được chứng minh.

b) $\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{xy}\ge\dfrac{6}{\left(x+y\right)^2}$

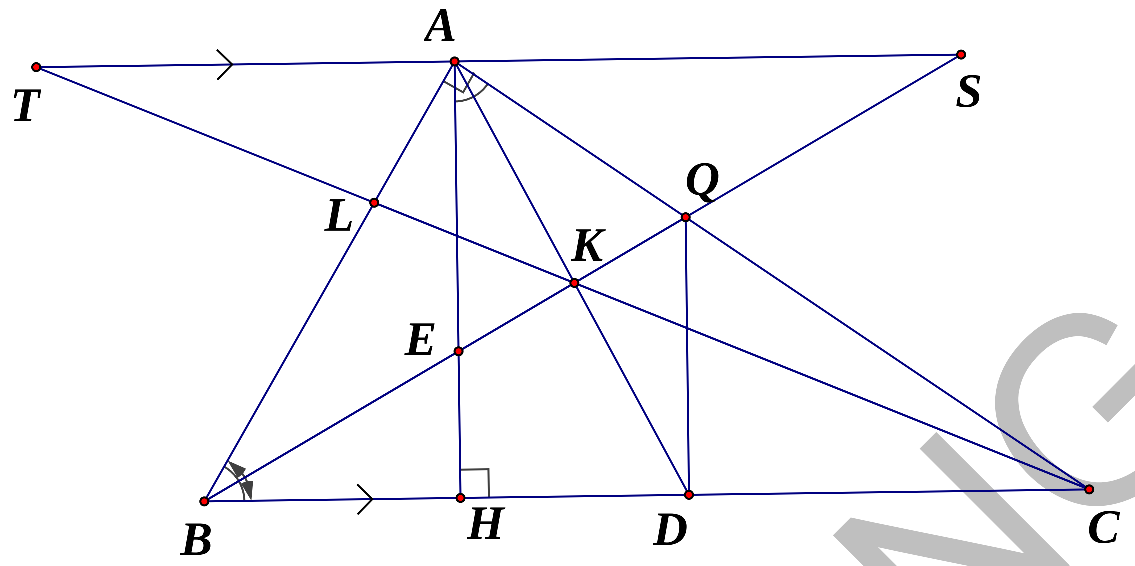
Áp dụng BĐT câu a) và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b}\left(\forall a,b>0\right)$**, ta được:**

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}\ge\frac{4}{\left(x+y\right)^2}+\frac{4}{2\left(x+y\right)^2}=\frac{6}{\left(x+y\right)^2}\text{ : đpcm}$$

Bài 3:

Bài 4:

Cho ΔABC vuông tại A có AH là đường cao. BQ là tia phân giác của góc B; AD là tia phân giác của HAC. BQ cắt AD tại K. CK cắt AB tại L.



a) **Chứng minh: ΔDAQ là tam giác cân.**

Gọi E là giao điểm của AH và BQ.

Chứng minh được: ΔAEQ cân tại A $\Rightarrow$ AD là đường phân giác cũng là đường cao.

Do đó: E là trực tâm của ΔABD. $\Rightarrow DE \perp AB$ mà $AC \perp AB$ nên AC // DE.

$\Rightarrow QDA = DAE$ **(2 góc so le trong)**

mà $DAE = DAQ(...)$ **nên** $QDA = DAQ \Rightarrow \Delta DAQ$ **cân tại Q**

b) **Chứng minh:** $\dfrac{DC}{DB} \cdot \dfrac{LB}{LA} \cdot \dfrac{QA}{QC} = 1$

Từ A vẽ đường thẳng song song với BC, cắt BQ tại S, cắt CK tại T.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{DB}{AS} = \dfrac{DK}{AK} (BD \,//\, AS) \\ \dfrac{DC}{AT} = \dfrac{DK}{AK} (DC \,//\, AT) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{DB}{AS} = \dfrac{DC}{AT} \Rightarrow \dfrac{DC}{DB} = \dfrac{AT}{AS} \quad (1)$

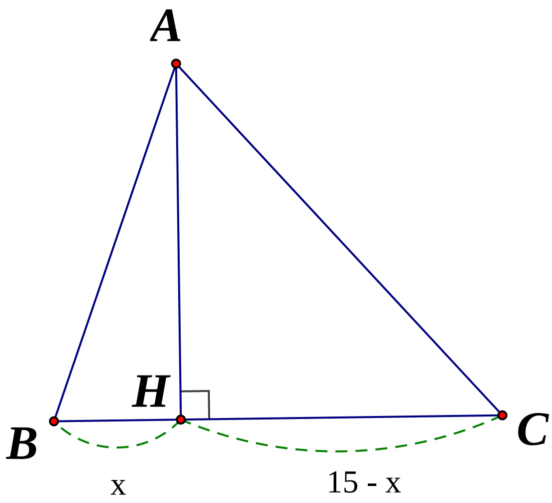
Ta có: $\dfrac{LB}{LA} = \dfrac{BC}{AT} (BC \,//\, TA) \quad (2)$

Ta có: $\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{AS}{BC} (AS \,//\, BC) \quad (3)$

Từ (1), (2). và (3) ta suy ra $\dfrac{DC}{DB} \cdot \dfrac{LB}{LA} \cdot \dfrac{QA}{QC} = 1$

Bài 5:

Cho ΔABC có AB = 13; AC = 14; BC = 15; có đường cao AH. Tính AH.



<u>Tính AH.</u>

Ta có: BC là cạnh lớn nhất của ΔABC nên A là góc lớn nhất trong $\Delta ABC \Rightarrow$ điểm nằm giữa B và C

Đặt BH = x (x > 0) $\Rightarrow CH = 15 - x$

Áp dụng định lý Pytago, ta có:

$$\begin{cases} AH^2 = AB^2 - BH^2 = 13^2 - x^2 \\ AH^2 = AC^2 - CH^2 = 14^2 - (15 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow 169 - x^2 = 196 - 225 + 30x - x^2$$

$$\Rightarrow 30x = 198 \Rightarrow x = \frac{33}{5} \Rightarrow AH^2 = 196 - \left(\frac{33}{5}\right)^2 = \frac{3136}{25} \Rightarrow x = \frac{56}{5}$$

Vậy $AH = \frac{56}{5}$ **cm**

HẾT